

# STATISTICA PSICOMETRICA a.a. 2004/2005

Corsi di laurea

Scienze e tecniche neuropsicologiche

Lezione 1 e 2

17-18 Febbraio, 2005

1

## Statistica & Psicologia

### **Positivismo**

Comte (1798-1857)

#### •**Realismo ingenuo**

*realtà conoscibile*

#### •**Dualismo/oggettività**

*nessun rapporto soggetto-oggetto*

#### •**Scienza sperimentale / leggi assolute**

*valore assoluto*

### **Psicofisica**

Fechner (1801-1887)

2

## Statistica & Psicologia

Fechner (Gustav Theodor), filosofo, psicologo e fisico tedesco (Gross-Särchen, presso Forst, 1801 - Lipsia 1887). Dopo essersi laureato in medicina, si occupò di fisica e divenne professore all'università di Lipsia. Interruppe l'insegnamento nel 1840 per l'incombente minaccia della cecità e dopo la guarigione si volse alla filosofia.. La sua notorietà è legata soprattutto al tentativo di costruire una psicologia sperimentale su base matematica. Formulò, utilizzando gli studi del fisiologo Weber, quella che egli chiamò "la legge psicofisica fondamentale". Stimoli e sensazioni sono in un rapporto quantitativo definito, e precisamente: se l'intensità dello stimolo cresce in progressione geometrica, la sensazione corrispondente cresce in progressione aritmetica, Tale legge, nota come legge di Fechner o, impropriamente, di Weber-Fechner, è espressa da una formula di misura psicofisica (*psychophysische Massformel*) in cui l'intensità di una sensazione  $S$  è uguale al prodotto di una certa costante  $k$  per il logaritmo dell'intensità dello stimolo  $R$  (dal tedesco *Reiz*):



$$S = k \log R$$

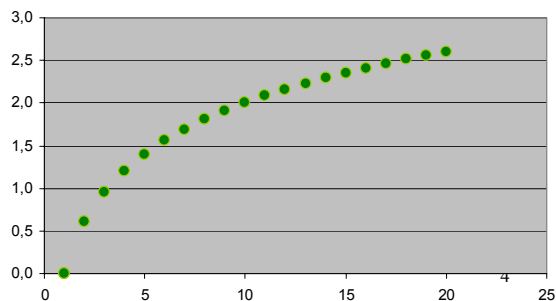
3

## Statistica & Psicologia

Fechner, enunciò in termini matematici la legge fondamentale della *psicofisica*. Secondo questa legge l'intensità della risposta sensoriale è direttamente proporzionale al logaritmo dello stimolo fisico. Altre ricerche compiute dalla psicofisica cercavano di individuare in maniera rigorosa la soglia al di sotto della quale uno stimolo cessa di produrre una risposta percettiva. Nell'insieme sembrava delinearsi la possibilità di unificare in un'unica trattazione matematica i dati del mondo fisico e le corrispondenti risposte mentali

R (stimolo)	S (sensazione)
1	0,0
1	0,0
2	0,6
3	1,0
4	1,2
5	1,4
6	1,6
7	1,7
8	1,8
9	1,9
10	2,0
11	2,1
12	2,2
13	2,2
14	2,3
15	2,4
16	2,4
17	2,5
18	2,5
19	2,6
20	2,6

$$S = 2 \log R$$





## Statistica & Psicologia



7

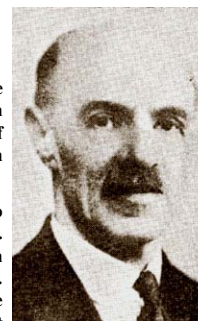
## Psicometria

### Spearman (1863-1945)

Spearman's name is almost synonymous with the term 'general intelligence' (otherwise known as psychometric 'g'). While still a student (albeit a rather old one – Spearman was 48 when he received his Ph.D.), he published his famous two-factor theory of intelligence. Spearman speculated that all intellectual functioning was underpinned by an overall mental ability accompanied by specific abilities for differing mental tasks.

One of the great achievements of psychology evolved from Spearman's efforts to operationalize his theory - the statistical procedure we now know as 'factor analysis'. The procedure he developed (the method of tetrad differences) indicated to Spearman that his theory was in fact correct. Unfortunately, not everyone agreed with him. Objections ranged (and still do) from the simplistic nature of 'g', through to the relative stability of the mathematical procedures adopted. On the other hand, many eminent (especially British) psychologists (e.g., Sir Cyril Burt) concurred and 'g' became an established psychological construct. Proponents of general intelligence, or 'g', still exist amongst prominent psychologists – examples include Arthur Jensen and Philip Vernon. It took almost 30 years before Thurstone developed the technique of multiple factor analysis. This procedure questions the derivation, nature, and importance of 'g'.

Controversy still surrounds the question of whether 'intelligence' is best conceived of as a unitary entity (Spearman) or as a multi-faceted collection of abilities. Still "horses for courses" as the saying goes. Perhaps Spearman's dogmatic determination in promoting and maintaining his position lay in his 15 years of military service (as a British army officer) in India. Like many successful professionals, famous psychometricians appear to come from extraordinarily disparate backgrounds.



8

## Psicometria

### Louis Leon Thurstone (1887 -1955)

Renaissance man turned psychometrician – this is perhaps the best way to encapsulate Thurstone's career. He is considered by many the quintessential American psychometrician. This reflects not only his exceptional contributions to factor analysis (i.e., the development of multiple factor analysis) but also his work on measurement theory and models of intelligence.

Thurstone recognized the inadequacies of psychological measurement techniques and single handedly devised methods to produce scales to which meaningful interval and ratio criteria could be applied. The ambiguities of Binet's "mental age" received his attention and led to the introduction of standardized IQ scores (mean 100, standard deviation 15 is the norm for modern representations). Application of his new factor analytic techniques led Thurstone to postulate the notion of Primary Mental Abilities (PMA's). These are crudely defined as relatively independent sub-components of intelligence that individuals possess to a greater or lesser degree. This discovery led to inflamed debate over the nature of intelligence, because it appeared to suggest the opposite of that proposed by Spearman in his general intelligence theory. The debate still continues with proponents of "g" pointing out that at the highest level of analysis a general factor emerges. Whether or not Thurstone's concept of PMA's (and the related theory of fluid and crystallized abilities) can ever be reconciled with Spearman's "mental energy" appears unlikely. Perhaps Thurstone's greatest contribution to psychometrics (and psychology) was the introduction of "simple structure" to factor analysis. Simple structure allows for meaningful psychological interpretation of factor analytic results, and thus insight into the potential processes involved in intelligent functioning.

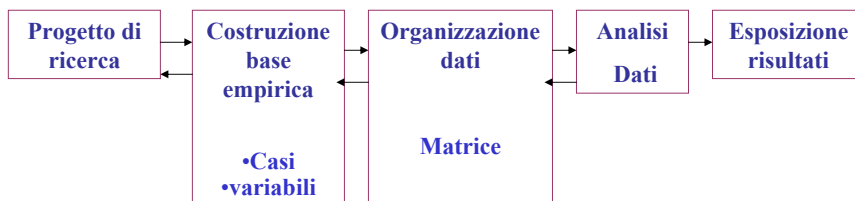


9

## La ricerca Empirica

**La ricerca empirica nelle scienze umane (psicologiche e sociali) è una successione di operazioni per produrre risposte a domande sulla realtà**

- **Produce affermazioni sulla realtà**
- **Giustifica le affermazioni su una base empirica**
- **Produce un sapere controllabile**



10

## La ricerca Empirica

*La ricerca empirica produce affermazioni sulla realtà in termini di asserti o nessi fra asserti*

*Asserto = concetto pensabile in termini di "vero/falso"*

### Alcune distinzioni

#### • Fonti primarie/secondarie

• *Trasversali* → *cross section*

(*Simultanei*) → *Panel*

• *Longitudinali* → *Trend*

TEMPO

**Longitudinali**

**Trasversali**

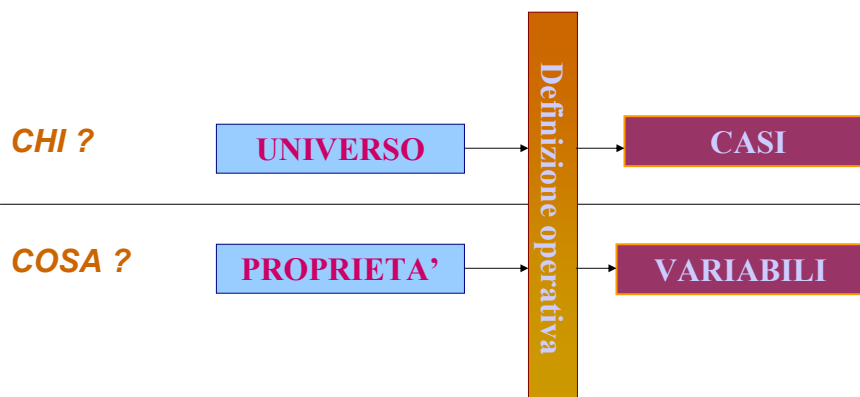
• *Osservazione*

• *Sperimentazione*

11

## La costruzione della base empirica

*Reperimento delle informazioni utili allo svolgimento della ricerca*



12

## La costruzione della base empirica

**Definizione operativa** *insieme delle regole che permettono di riportare nella matrice dati lo stato di un individuo su una ben definita proprietà . Attraverso la definizione operativa si passa dai concetti astratti ad oggetti direttamente osservabili*

*Nell'individuazione dei casi =Criterio di eleggibilità*

**Esempio:**Moscovici Personnaz (1980) giungono alla conclusione che una minoranza influenza i soggetti in modo tale che questi rivedano le basi profonde del loro giudizio  
misura degli effetti persuasivi di una minoranza  
ricorso al fenomeno dell' *after-effect cromatico*

13

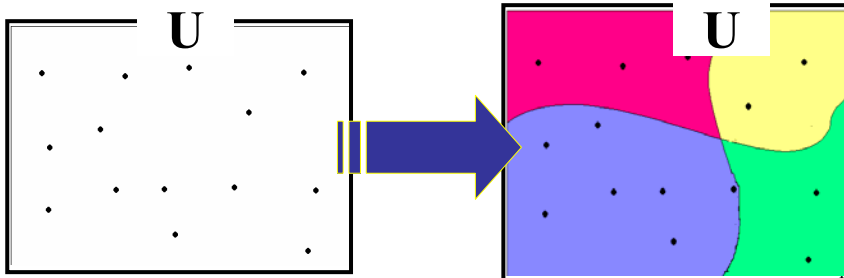
## Dalle proprietà alle variabili

### Definizione operativa

*È necessario che la proprietà goda di un prerequisito minimo:*

*La possibilità di suddividere gli elementi di un dominio in due o più classi di equivalenza*

*Definizione operativa come partizione di un insieme*



## Dalle proprietà alle variabili

### Definizione operativa

#### Regole per la partizione di un insieme

##### Sintattiche:

- *Unicità fundamentum divisionis*
- *Mutua esclusività*
- *Esaustività*

##### Semantiche:

- *Due elementi qualsiasi appartenenti al medesimo sottoinsieme possono essere considerati indistinguibili rispetto alla proprietà*
- *Due elementi appartenenti a sottoinsiemi diversi devono essere considerati distinti rispetto alla proprietà*

15

## Dalle proprietà alle variabili

### Definizione operativa

**PROPRIETA'** →

a) Rilevare lo stato degli N elementi  
(assegnare ogni caso ad una classe di eq.)

b) Associare un codice ad ogni stato  
o classe di equivalenza

**VARIABILE** ←

c) Riportare i risultati della rilevazione in una  
colonna di una matrice dati assegnando il codice  
corrispondente al suo stato sulla proprietà

16

## Dalle proprietà alle variabili

### Definizione operativa

#### Esempio

**PROPRIETA'** *Livello di Istruzione*

**VARIABILE** *Titolo di studio*

#### *Libro codice*

- 1= licenza elementare
- 2= licenza media inferiore
- 3= licenza media superiore
- 4= laurea

Ident	Tito_stu
1	1
2	3
3	2
4	1
5	3
6	4
7	2
...	3
n	2

17

## Dati e strutture di dati

**DATO=** *segno che designa lo stato di un oggetto su un proprietà, l'appartenenza di un oggetto ad una singola classe di equivalenza*

### Strutture di dati

**Matrice CxV**  
(caso per variabile)

**Matrice CxV**  
*Forma compressa*

RIGHE=casi  
COLONNE=variabili  
CELLE=dato

**Matrice CxV**  
*Forma estesa  
Dummy*

RIGHE=casi  
COLONNE=classi di eq.  
CELLE=valore di verità

**Matrice CxV**  
*Forma ridotta*

Variabili continue in  
forma compressa  
Variabili ctegoriali in  
forma estesa

18

## Dati e strutture di dati

### Esempio

**Matrice CxV**  
Forma compressa

Ident	Altezza	Genere
1	1,72	1
2	1,65	2
3	1,87	2
4	1,78	1

**Matrice CxV**  
Forma estesa  
Dummy

Ident	Altezza				Genere	
	1,72	1,65	1,87	1,78	1	2
1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	1	0

**Matrice CxV**  
Forma ridotta

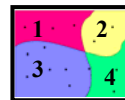
Ident	Altezza	Genere	
		1	2
1	1,72	1	0
2	1,65	0	1
3	1,87	0	1
4	1,78	1	0

19

## Assegnare, misurare, contare

*Diverse operazioni consentono di passare dalle proprietà alle variabili*

**Classificazione** assegnazione a classi  
di equivalenza

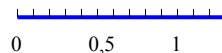


**Ordinamento** assegnazione a categorie  
ordinate

1=lic.elem  
2=m.inf  
3=m.sup  
4=laurea



**Misurazione** confronto con una unità  
di misura



**Conteggio** enumerazione degli oggetti  
posseduti ...

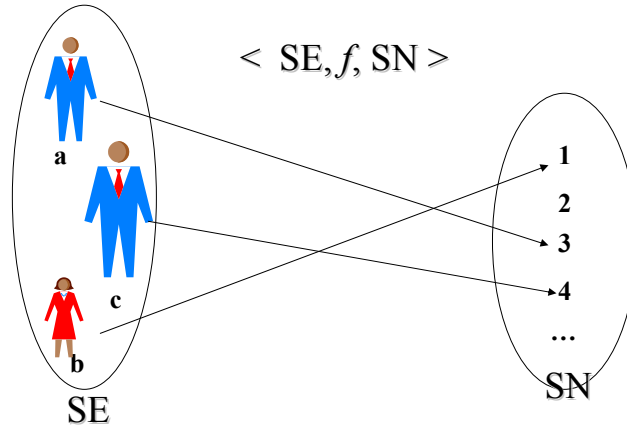


20

## Teoria della misurazione

La definizione operativa (operativizzazione di un concetto in una variabile) comporta una codifica che stabilisce una **relazione** tra gli elementi di un sistema empirico (SE) e gli elementi di un sistema numerico (SN)

Una variabile (scala di misura) è un sistema che mette in relazione gli elementi di un sistema empirico con gli elementi di un sistema numerico



21

## Teoria della misurazione

La teoria della misurazione si occupa di studiare le condizioni necessarie per rappresentare un SE attraverso un SN

### TRE PROBLEMI FONDAMENTALI

1. **Rappresentazione**                      **A quali condizioni ?**
2. **Unicità**                                      **Con quanta libertà ?**
3. **Significanza**                                **Quale interpretazione ?**

22

## Teoria della misurazione

### Rappresentazione

**Condizioni che permettono di rappresentare un certo SE attraverso un certo SN**

se si volesse rappresentare la relazione d'ordine (altezza) presente fra i tre soggetti dell'esempio precedente si potrebbero attribuire ai Tre individui tre numeri

$$c > a > b$$

$$4 > 3 > 1$$

Nel sistema numerico vale la condizione  $4 > 1$  (transitività)

Tale relazione deve valere anche nel SE

Poiché tale relazione è presente anche nel sistema empirico è lecito rappresentare la relazione d'ordine esistente tra i soggetti per mezzo della relazione d'ordine che esiste tra i numeri

23

## Teoria della misurazione

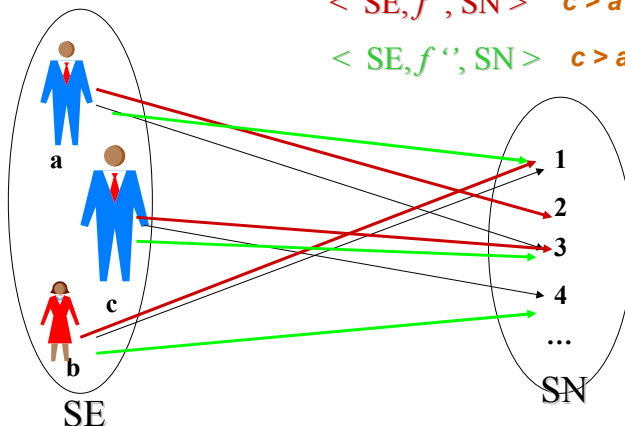
### Unicità

**Quanta libertà abbiamo nell'assegnare i codici numerici ?**

$$\langle SE, f, SN \rangle \quad c > a > b \quad 4 > 3 > 1$$

$$\langle SE, f', SN \rangle \quad c > a > b \quad 3 > 2 > 1$$

$$\langle SE, f'', SN \rangle \quad c > a > b \quad 3 > 1 < 4$$



La relazione d'ordine è rispettata anche da  $\langle SE, f', SN \rangle$ , ma non da

$$\langle SE, f'', SN \rangle$$

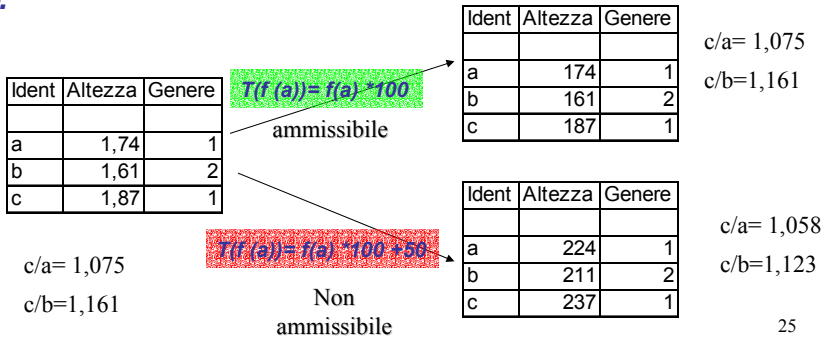
24

## Teoria della misurazione

### Unicità

#### Concetto di Trasformazione ammissibile:

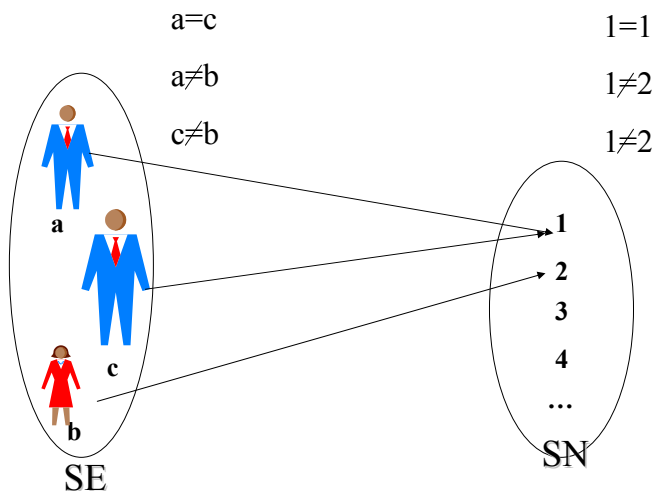
Sia  $\alpha$  un SE rappresentato dal SN  $\beta$ . Una trasformazione dei valori di scala  $f'(a) = T(f(a))$  è detta ammissibile se anche  $f'(a)$  è una rappresentazione del SE  $\alpha$  attraverso il SN  $\beta$ .



## Teoria della misurazione

### Significatività

#### Interpretazione che è possibile dare ai valori numerici della scala



## Teoria della misurazione

### LIVELLI DI SCALA

Operazione di rilevazione	Unità di misura	Origine	Trasform. ammissibili	Livello di scala
Classificazione	assente	*	Transcodifica	Categoriale
Ordinamento	assente	*	Monotona strettamente crescente $y' = m(y) \quad m > 0$	Ordinale
misurazione	Convenz.	Convenz.	Affine $y' = b(y) + a \quad b > 0$	Intervalli
misurazione	Convenz.	Non Convenz.	Dilatazione $y' = b(y) \quad b > 0$	Rapporti
misurazione	Non Convenz.	Convenz.	Traslazione $y' = y + a$	Differenze
Conteggio	Non Convenz.	Non Convenz.	Identica $y' = y$	Assoluta

## Teoria della misurazione

### SCALA NOMINALE (CATEGORIALE)

*Una scala nominale viene generata quando un SE è composto da elementi per i quali è possibile stabilire unicamente una relazione di uguaglianza disuguaglianza*

*E' quindi accettabile qualunque trasformazione non alteri i rapporti di uguaglianza disuguaglianza*

Es:  $1 = \text{maschio}$   $\Rightarrow$   $1 = \text{maschio}$   $\Rightarrow$   $5 = \text{maschio}$   
 $2 = \text{femmina}$   $\Rightarrow$   $0 = \text{femmina}$   $\Rightarrow$   $3 = \text{femmina}$

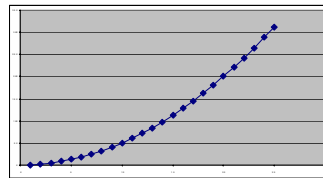
## Teoria della misurazione

### SCALA ORDINALE

*Quando sul SE è definita la relazione di > o < oltre a quella di uguaglianza-disuguaglianza, la scala che deriva dalla sua rappresentazione numerica è detta scala ordinale*

*E' quindi accettabile qualunque trasformazione non alteri i rapporti di uguaglianza disuguaglianza e di ordinamento*

Id	Z
1	3
2	5
3	4
4	6



$$z' = z^2 / 2$$

Id	Z'
1	4,5
2	12,5
3	8
4	18

29

## Teoria della misurazione

### SCALA INTERVALLI

*Quando sul SE è definita la relazione di uguaglianza-disuguaglianza, degli intervalli, oltre alle relazioni di <, <= ...) la scala che deriva dalla sua rappresentazione numerica è detta scala intervalli*

*E' quindi accettabile qualunque trasformazione non alteri i rapporti di uguaglianza disuguaglianza degli intervalli (oltre ai requisiti precedenti)*

Id	Celsius
To	3
Fi	5
Pa	9

$$F = 32 + 9/5 C$$

$$y' = b(y) + a \quad b > 0$$

Id	Fahrenheit
To	37,4
Fi	41,0
Pa	48,2

$$F_i - T_o = 2$$

$$P_a - F_i = 4$$

$$P_a - F_i = 2(F_i - T_o)$$

$$F_i - T_o = 3,6$$

$$P_a - F_i = 7,2$$

$$P_a - F_i = 2(F_i - T_o)$$

30

## Teoria della misurazione

### SCALA INTERVALLI

*Quando sul SE è definita oltre alla relazione di uguaglianza-disuguaglianza, degli intervalli, anche quella di uguaglianza dei rapporti la scala è detta scala di rapporti*

*E' quindi accettabile qualunque trasformazione non alteri le relazioni di uguaglianza disuguaglianza degli intervalli e dei rapporti (oltre ai requisiti precedenti)*

Ident	Altezza
a	1,74
b	1,61
c	1,87

Dilatazione  
 $y'=b(y)$   $b>0$

$$y'=100 * y$$

Ident	Altezza
a	174
b	161
c	187

$$c/a= 1,075$$

$$c/b=1,161$$

$$c/a= 1,075$$

$$c/b=1,161$$

31

## Teoria della misurazione

*Altri tipi di variabili*

### SCALA ASSOLUTA

*Un' operazione di conteggio genera una scala "Assoluta"*

*Esempio: quanti figli hai?*

*La risposta non è espressa in unità di misura, ma in unità di conto.*

*Per questo nessuna trasformazione è ammissibile, perché qualunque trasformazione (a parte quella identica) altera il contenuto informativo della scala*

32

## Teoria della misurazione

### Altri tipi di variabili

#### VARIABILI DICOTOMICHE

*In alcuni casi le variabili dicotomiche sono assimilabili a variabili cardinali, in quanto il codice 0 o 1 indicano un valore di verità.*

*0=nessuna verità*

*1=totale verità*

*Riferendosi ad una logica fuzzy (Zadeh) i valori 0 e 1 possono intendersi non come valori discreti, ma come estremi di un continuum*

33

## Teoria della misurazione

### Altri tipi di variabili

#### SCALE LIKERT

*Sono variabili che presentano in genere 5 o 7 modalità di risposta che esprimono gradi di accordo con una certa affermazione*

D28	Secondo alcuni Torino dovrebbe affiancare alla sua tradizionale immagine di città industriale quella di città turistica e culturale. In che misura è d'accordo con questa opinione?	
	1= Del tutto d'accordo	
	2=Molto d'accordo	
	3=Abbastanza d'accordo	
	4=Né d'accordo né in disaccordo	
	5=Abbastanza in disaccordo	
	6=Molto in disaccordo	
	7= Del tutto in disaccordo	

34

## Teoria della misurazione

*Altri tipi di variabili*

*Differenziale semantico*

*Proposto da Osgood chiede all'intervistato di collocare un concetto su una scala a sette o undici postii cui estremi sono etichettati con due aggettivi opposti*

Stimolo= TORINO								
Bella								Brutta
Dolce								Amara
Pericolosa								Sicura
Morta								Viva
Attiva								Passiva

35

## Statistica Idonea

*$y$ =vettore dei valori che gli elementi assumono rispetto ad una propr.*

*$t(y)$  = trasformazione ammissibile*

*$f(y)$  = statistica*

*Possiamo calcolare le seguenti quantità*

*$S=f(y)$                       statistica*

*$S'=f(t(y))$                 Statistica sulla variabile trasformata*

*$S''=t(f(y))$                 Trasformazione della statistica*

36

## Statistica Idonea

*Si possono verificare le seguenti eventualità*

$S'=S$        $f(t(y))=f(y)$       *Invarianza assoluta*

$S'=S''$        $f(t(y))=t(f(y))$       *Equivarianza*

$S'=gS(t)$        $f(t(y))=g(f(y),t)$       *Ortovarianza*

$S' \neq gS(t)$        $f(t(y))=g(f(y),t)$       *Nemmeno Ortovariante*

*Una statistica si dice IDONEA, applicabile ad una certa variabile se è almeno ORTOVARIANTE rispetto alla classe delle trasformazioni ammissibili di quella variabile*

## Statistica Idonea

*Es: media equivariante per trasformazioni affini*

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n y_i$$

Y	Y'
2	5
4	9
6	13

$t(x): y'=2(y) + 1$

$S=f(y)$        $(2+4+6)/3 = 12/3$        $= 4$

$S'=f(t(y))$        $(5+9+13)/3 = 27/3$        $= 9$

$S''=t(f(y))$        $2(4)+1 = 8 + 1$        $= 9$



$S' = S''$

*Equivarianza*

## Cenni di teoria dei dati

Notazione

**Matrice CxV**

*Forma compressa*

	V1	V2	V3	...	Vj	j
1		↓			↓	
2		↓			↓	
3	→	X <sub>23</sub>			↓	
...					↓	
i	→	→	→	→	X <sub>i,j</sub>	
N						

39

## Cenni di teoria dei dati

Classificazione delle matrici di dati

**Vie**

**Modi**

**Condizionamento**

**Vie = numero di entrate della matrice**

**CxV = 2 entrate**

Ident	Altezza	Genere
a	174	1
b	161	2
c	187	1

**CxVxT = 3 entrate**

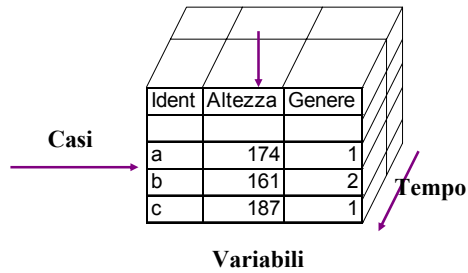
Ident	Altezza	Genere
a	174	1
b	161	2
c	187	1

40

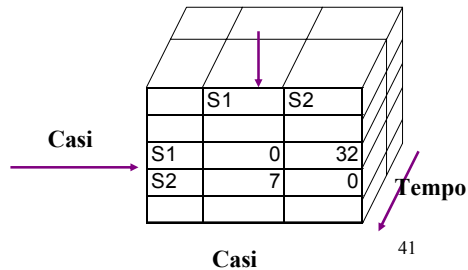
## Cenni di teoria dei dati

**Modi= numero di entità distinte a cui il dato rimanda**

**Tre vie e tre modi**



**Tre vie e due modi**



## Cenni di teoria dei dati

**Condizionamento =una matrice a due vie è:**

**unconditional** se consente confronti tra le celle sia per riga che per colonna.

**Column conditional** se consente confronti tra le celle entro la colonna

**Row conditional** se consente confronti tra le celle solo entro la riga

**Unconditional**

ident	ore di studio	ore di divertimento
1	3	4
2	5	3
3	4	7
4	2	1

**Column conditional**

ident	Altezza	Genere
1	175	1
2	145	2
3	181	1
4	168	1

**Row conditional**

ident	Likert 1	Likert 2
1	3	5
2	2	3
3	4	2
4	1	6